《定義》独立試行

$T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ を試行とする。さらに，$T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ をこの順で一連に行う試行（をひとつとみなした試行）を S とする。$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ をそれぞれ $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ における事象とする。任意の事象の族 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ に対し，B を「試行 T_1 で事象 A_1 が起き，試行 T_2 で事象 A_2 が起き，試行 T_3 で事象 A_3 が起き，……，試行 T_n で事象 A_n が起こる」事象として

$$P(B) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \cdots \times P(A_n)$$

が成り立つとき，**S は独立試行である**と呼ぶ。

〈補足〉

事象 B は $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$ でないことに注意しよう。さいころを 1 回ずつ 2 回振る試行について，A_1 を「1 回目に 1 の目が出る」事象，A_2 を「2 回目に 1 の目が出る」事象とおくと，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ となってしまう。ここでは $\tilde{A_1}$ を「1 回目に 1 の目が出て，2 回目は何でもよい」事象，$\tilde{A_2}$ を「2 回目に 1 の目が出て，1 回目は何でもよい」事象として $B = \tilde{A_1} \cap \tilde{A_2}$ とせねばならない。

S の全事象を U とおく。厳密な B の定義は，A_k の代わりに “cylinder in C with base A_k” すなわち

$$\tilde{A_k} = \{\, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_n) \mid x_k \in A_k \,\}\ (\subset U)$$

を用いて

$$B = \tilde{A_1} \cap \tilde{A_2} \cap \tilde{A_3} \cap \cdots \cap \tilde{A_n}$$

とおいたうえで

$$P(B) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \cdots \times P(A_n)$$

とするべきである。$\tilde{A_k}$ は，「k 回目は A_k が起き，k 回目以外は何が起きてもよい」という事象である。n 回の試行を一連に行うことをひとつの試行としているのであるから，n 回の結果すべてを述べているものこそが試行 S の事象である。A_k は，「k 回目は A_k が起きる」と言っているだけで，k 回目以外については（何が起きてもよいとすら）何も述べていない。よって，これは S の事象ではない。しかし，高校課程ではこれらは（簡単のためにあえて）混同されている。

↩M.Loeve，Probability Theory I 4th Edition。Springer-Verlag，p.62，1977。

〈補足〉

独立試行は一連の試行 S に定義されるが，「$T_1, T_2, \dots, T_n$ が独立である」と呼ぶことは多い。高校数学の教科書においてもそのように記述されている。

〈吟味〉

試行 S を試行 T_1 と試行 T_2 を続けて行う試行とする。「試行 S が独立試行である」すなわち「試行 T_1 と試行 T_2 が独立である」とは，「一方の結果（任意の事象が起こること）が他方の結果（任意の事象の確率）に影響を与えない」ことを意味する。

〈例示〉

赤球 5 個，白球 1 個が入った袋がある。

（ i ）　球を 1 個取り出したのち色を確認して戻すことを 2 回行う。1 回目を T_1，2 回目を T_2 とおく。このとき，T_1 と T_2 は独立である。

実際，T_1 で赤球が出たときに T_2 で白球が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるが，T_1 で白球が出たときに T_2 で白球が出る確率も $\dfrac{1}{6}$ である。他の球の出かたについてもすべて同様に等しくなる。

（ ii ）　球を 1 個取り出したのちその球を除けることを 2 回行い，1 回目を T_1，2 回目を T_2 とおく。このとき，T_1 と T_2 は独立でない。

実際，T_1 で赤球が出たときに T_2 で白球が出る確率は $\dfrac{1}{5}$ であるが，T_1 で白球が出たときに T_2 で白球が出る確率は 0 である。

このとき，（ i ）のような操作を復元抽出，（ ii ）のような操作を非復元抽出と呼ぶ。

〈例示〉

さいころを 2 回振る。1, 2 回目ともに 6 の目が出る確率を考える。

(1)　さいころを 2 回振る全事象は $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$ の 36 通りで，1, 2 回目ともに 6 の目が出る事象は $\{(6, 6)\}$ ゆえ，$P(A) = \dfrac{1}{36}$ となる。

(2)　さいころを振る 1 回目と 2 回目は独立である。さいころを 1 回振るとき（1 回目も 2 回目も），全事象は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の 6 通りで，6 の目が出る事象は $\{6\}$ ゆえ，6 が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である。よって，$P(A) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$ となる。

このように，試行の独立性が利用できるときは，根元事象を減らすことができる。さいころを 10 回振ることなどを考えると，威力が分かるだろう。一方，「2 回振るときの目の和が 7」のような事象は，1 回目と 2 回目の事象（定義における cylinder A_k）に分割できないため，(1) のように扱うほかない。