

《例題》

△ABC に対し、 $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とおく。次の点がどのような位置にあるか説明せよ。

(1) $\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{6}$, (2) $2\left(\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{6}\right)$, (3) $\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$, (4) $\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{8}$ 。

〈分析〉

(1) は (分子の係数の和) = (分母) であり, $\frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m + n}$ の形をしている。(2) は (1) が 2 倍されている。

(3)(4) はそのままでは分点公式の形をしていない。

〈解決〉

(1) 点 B と点 C を 2 : 4 = 1 : 2 に内分する点。

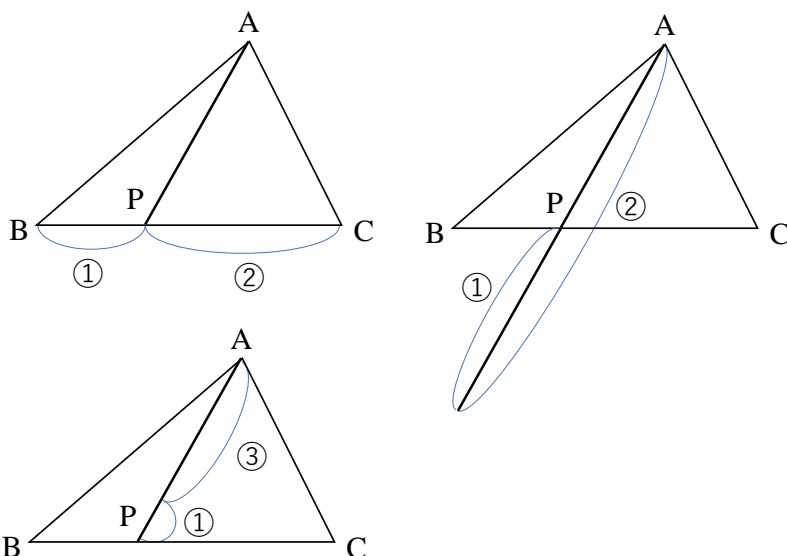
(2) (1) の点を P とし, AP を 2 : 1 に外分する点。

(3) $\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{3} = 2\left(\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{6}\right)$ であるから,

(1) の点を P とし, AP を 2 : 1 に外分する点。

(4) $\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{8} = \frac{6}{8}\left(\frac{4\vec{b} + 2\vec{c}}{6}\right)$ であるから,

(1) の点を P とし, AP を 3 : 1 に内分する点。



〈吟味〉

2 回以上の内分・外分を繰り返して点が決まるときは, 途中の点を名づけるほかない。

お化けのマークは一般にはつきません。

tasks 環境も読み込みますが, この場合は横幅の余裕が足りなかったために $\text{\texttt{\$fill}}$ で配置しました。

波線は〈解決〉と対応しています。

傍注領域は, 私自身は教員 (私) 用のメモに用いています。プリアンブルで $\text{\texttt{\$sethideanswer}}$ とするとこの部分が印刷上非表示 (白文字) になります。生徒にとっては, 授業中のメモ欄として使うことができます。

ここでは, 図はペイントソフトで描き, 流し込みました。余裕があれば, または複雑な計算を要するときは, $\text{\texttt{emath}}$ で独立した PDF として図を描き, 読み込むこともよく行っています。なお, 〈解決〉以下をプリアンブルで $\text{\texttt{\$sethideanswer}}$ とすることで非表示とすることができます (hideanswer 環境を使い, 図は $\text{\texttt{hidegraphics}}$ で流し込む)。

《例題》

$\triangle ABC$ と点 P が等式 $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ をみたす。

(1) \overrightarrow{AP} を $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ で表せ。

(2) 点 P はどのような位置にあるか。

(3) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めよ。

〈解決〉

(1) \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} に分解すべく、点 A を始点 (原点) に揃える。

等式 $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ を変形すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ 6\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \therefore \overrightarrow{AP} &= \frac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{6}\end{aligned}$$

を得る。

(2) (1) より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{6} \left(\frac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{5} \right) \quad \text{図形が解釈できる形を作る。}$$

を得る。 Q を $\overrightarrow{AQ} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{5}$ で定めると $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$ となる。

よって、 Q を辺 BC を $3:2$ に内分する点とおくとき、点 P は線分 AQ を $5:1$ に内分する点である。

(3) PQ を共通底辺として $\triangle PBQ : \triangle PCQ = BQ : QC = 3 : 2$

を得る。よって $\triangle PCQ = 2S$ とおくと $\triangle PBQ = 3S$ となる。

$AP : PQ = 5 : 1$ ゆえ、 PA を共通底辺として

$$\triangle PAB = \frac{5}{6} \cdot 3S = \frac{5}{2}S,$$

$$\triangle PCA = \frac{5}{6} \cdot 2S = \frac{5}{3}S$$

を得る。したがって $\triangle PBC = 2S + 3S = 5S$ となる。

以上より

$$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 5S : \frac{5}{3}S : \frac{5}{2}S = 6 : 2 : 3$$

が従う。

$\triangle PCQ = 2S$ とおいたのは $\triangle PBQ$ を整数比にするためである。単に S とおいて素朴に解いてもよい。

傍注領域がない
ほうがよければ、
プリアンブルで
`\setlength{\text-`
`width}{30\zw}` と
することで端まで
本文にすることが
できます。一方、
`\easternote` によって
通常の (番号付き
の) 傍注を出力する
こともできます。

ある程度手動の調整
が必要ですが、ペー
ジ右端に他の文章を
無視して図を配列す
る `\rightgraphics` と、
それに合わせて左に
文章を流す `\lefttext`
を用いて教科書・参
考書的な図の挿入が
できます。

