《講義》

初項が 1 かつ公差が 2 の等差数列について，初項から第 10 項までの和は

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

である。しかし，このように項をすべて書き並べることは，項が増えれば増えるほど困難である。そこで，よく

$$1+3+5+\cdots+19$$

のように書き表す。しかし，このように $\cdots$ で省略することは曖昧さが残る。そこで，これを簡潔かつ厳密に書き表すために，新たな記号を導入する。

初項が 1 かつ公差が 2 の等差数列は，一般項が $a_n = 2n-1$ である。これを初項（第 $\underline{1}$ 項）から第 $\underline{\underline{10}}$ 項まで足すことを

$$\sum_{\underline{n=1}}^{\underline{\underline{10}}}(2n-1)$$

と書く。文字 n に $n = 1,\ \underline{\underline{2,\ 3,}}\ \ldots,\ 10$ を順に代入し，すべて足し合わせるという意味で，

$$\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}_{2n-1\ \text{の第 1 項から第 10 項の和}}$$

である。初項が 1 かつ公差が 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和を書きたい。ここで，末項を第 n 項とすると，

$$\sum_{n=1}^{n}(2n-1) \qquad \text{（注：　この式は不適切）}$$

となってしまい n が混線する。そこで，一般項を別の文字で書き直し $a_k = 2k-1$ として，

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

と書く。これは

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2(n-1)+2)+(2n-1)$$

である。

ここで，一般項に用いる文字は何でもよいが，文字 k を用いることが多い（高校課程ではとくに k をよく見る）。この文字 k は計算が済むと消えてしまう。

《定義》Σ 記号 capital-sigma notation

数列 $\{a_n\}$ に対し，

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

と書く。

〈分析〉

文字 k に m から n を代入しながら足すことを意味する。

文字 k は代入用の器なので，書き下すと残らない。

たとえば，次のようになる：

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} a_{2k} &= a_{2\cdot1} + a_{2\cdot2} + a_{2\cdot3} + a_{2\cdot4} + a_{2\cdot5} \\ &= a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}\text{。}\end{aligned}$$

〈補足〉

縦に狭いときなどは $\sum_{k=m}^{n} a_k$ とも書く。

〈補足〉

Σ はギリシャ文字のひとつであり「シグマ」と読む。記号そのものは「数列 $\{a_k\}$ を $k=m$ から n まで足すと」などと意味を読めばよい。

†〈補足〉

本来，Σ 記号の定義に $\cdots$ が使われていては厳密性に欠ける。厳格には次のように定義する：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 & (n=1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n & (n \geqq 2) \end{cases}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \quad (m \geqq 2) \qquad \text{。}$$

このように，自然数 n に対する定義に自然数 $n-1$ までの定義を用いることを**再帰的定義**または**帰納的定義**と呼ぶ。