3年数学Ⅲ見本考査 No.1 2022-07-21 実施（50 分間）	組	番	名前 解答例・［解説］	知識理解 /50	思考判断表現 /50

1 以下の不定積分・定積分を求めよ。結果のみを解答欄に記せ。C を積分定数として用いてよい。 ［$5 \times 8 = 40$ 点　知識理解］

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^3-9x-6}{x^2-4}\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$　(4) $\displaystyle\int e^x \sin 2x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(7) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$　(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(1)	$\log\left\|x^3+1\right\|+C$
(2)	$x^2+\log\dfrac{\|x+2\|}{(x-2)^2}+C$
(3)	$x\sin x+\cos x+C$
(4)	$\dfrac{1}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)e^x+C$
(5)	$-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$
(6)	$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$
(7)	$\dfrac{1}{6}\pi$
(8)	$\dfrac{1}{4}\pi$

2 問題文... ［10 点　知識理解］

〈解決〉

解答例...

このソースファイルは，`\sethideanswer` という命令を追加するだけで解答欄の中身や**〈解決〉**以後の内容，配点を見えないようにできます。すなわち，同じファイルのスイッチングによって問題と解答を一度に作成できます。

---

3 $0 \leqq x$ ならば $1-\dfrac{x^2}{2} \leqq \cos x$ となることを示せ。

［15 点　思考判断表現］

〈解決〉

$0 \leqq x$ とする。まず

$$f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right) \quad \ldots①$$

とおく。①を微分して

$$f'(x)=-\sin x+x$$
$$f''(x)=-\cos x+1$$

となる。ここで，$\cos x$ の性質から

$$\cos x \leqq 1$$
$$-1 \leqq -\cos x$$
$$0 \leqq -\cos x+1=f''(x) \quad (\because \text{両辺に} 1 \text{を加えた})$$

を得る。したがって $f'(x)$ は単調に増加し，

$$f'(0)=-\sin 0+0=0$$

ゆえ $0 \leqq f'(x)$ となる。よって $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(0)=\cos 0-(1-0)=0$$

であるから $0 \leqq f(x)$ となる。以上より

$$0 \leqq \cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

すなわち

$$1-\frac{x^2}{2} \leqq \cos x$$

が従う。■

> $f'(x)$ の符号が俄かに分からなかったため，$f''(x)$ も調べた。単調増加に等号を含むが，示すべき式に等号があり十分。

組	番	名前 解答例・［解説］			3年数学III見本考査 No.2 2022-07-21 実施（50 分間）

$\boxed{4}$ 問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文問題文...　［15 点　思考判断表現］

〈解決〉

解答例...

図を導入するときは，emath や TikZ といったパッケージでまず図を作成しておきます。そののち，\hidegraphics という命令で画像を張り付けると，解答の表示・非表示に併せて図も表示・非表示を切り替えられます。詳しくはマニュアルをご覧ください。

$\boxed{5}$ n を自然数とする。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$ を求めよ。　［20 点　思考判断表現］

〈解決〉

別解（書き出す方法）は講評に掲載

x	$(k-1)\pi$	$\to$	$k\pi$
t	0	$\to$	π

$\sin x$ の周期に注意して，

$x=t+(k-1)\pi$ かつ x と t の対応を上のようにおく。このとき，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{n\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left|e^{-(t+(k-1)\pi)}\sin(t+(k-1)\pi)\right|dt\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left|e^{-t}e^{-(k-1)\pi}\sin(t+(k-1)\pi)\right|dt\\
&=\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin(t+(k-1)\pi)|\,dt\\
&\qquad(\because 0<e^{x},\ e^{-(k-1)\pi}\ \text{は}\ t\ \text{について定数})\\
&=\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin t|\,dt\qquad(\because |\sin t|\ \text{は周期}\ \pi)\\
&=\int_0^{\pi}e^{-t}|\sin t|\,dt\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\\
&\qquad\left(\because \int_0^{\pi}e^{-t}|\sin t|\,dt\ \text{は}\ n\ \text{について定数}\right)\\
&=\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\\
&\qquad(\because 0\leqq t\leqq\pi\ \text{において}\ 0\leqq\sin t)\\
&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}
\end{aligned}$$

を得る。ただし，$I=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt$ とおいて

$$\begin{aligned}
I&=\Big[-e^{-t}\sin t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-t}\cos t)\,dt\\
&=\Big[-e^{-t}\sin t\Big]_0^{\pi}-\left(\Big[e^{-t}\cos t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-t}\sin t)\,dt\right)\\
&=e^{-\pi}+1-I\\
\therefore 2I&=e^{-\pi}+1
\end{aligned}$$

による。さて，ここで

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\\
&=（\text{初項}\ 1\ \text{かつ公比}\ e^{-\pi}\ \text{の等比級数}）\\
&=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\qquad(\because 0<e^{-\pi}<e^{0}=1\ \text{より収束})
\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\\
&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{-(k-1)\pi}\right)\\
&=\frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}\\
&=\underline{\frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}}
\end{aligned}$$

を得る。

3年数学III見本考査 2022-07-21 実施（50 分間）	**計算用紙** **この用紙は回収しません。**